Sylvain Archenault
Yves Houpert

PROJET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :

Probabilités / Statistiques :

Le Mouvement Brownien

Projet GM3
Juin 2005

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Le projet qui nous a été confié est d'étudier le mouvement brownien.

Ce processus se retrouve presque partout, en finance, en signal, en modélisation de polymères, en physique. Il est de plus un des piliers de l'étude des processus stochastiques.
Dans cette étude, nous simulerons le mouvement brownien et nous rechercherons certaines propriétés de ce processus. Nous nous interrogerons par exemple sur la continuité (p.s) et la dérivabilité (p.s) du processus.

Dans une première partie, nous ferons un bref historique sur cette notion. Ensuite, nous exposerons les propriétés du mouvement brownien.

Dans une seconde partie, nous allons construire le mouvement brownien réel puis plan et nous apporterons nos conclusions relatives à notre étude.

Chapitre 2

Introduction au mouvement brownien

2.1 Historique.

Le mouvement brownien est le plus célèbre et le plus important des processus stochastiques. Voici un bref historique de cette notion qui joue un rôle dans de nombreux domaines de la science.

Historiquement, le mouvement brownien est associé à l'analyse des mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires, notamment parce que dans de nombreux problèmes, il, ou les résultats déduits de celui-ci, **fournissent des modèles limites stables** très intéressants à étudier.

Rappel historique :

Robert Brown, botaniste anglais, décrit en 1827 le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide.

Au XIX^esiècle, plusieurs physiciens reconnaissent ensuite que ce mouvement est très irréguliers et ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de sa vitesse donc il serait impossible de lui appliquer les lois de la mécanique.

En 1900, **Bachelier** introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique du prix des actions à la bourse, mais sa démarche est ensuite oubliée jusque vers les années 1960.

En 1905, **Einstein** construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse. Il trouve que la loi de la position à l'instant t de la particule sachant que l'état initial est x admet une densité gaussienne. Sa théorie sera rapidement confortée par des mesures expérimentales. Le physicien polonais **Smoluchowski** décrit à la même époque le mouvement brownien comme la limite des promenades aléatoires .

Ensuite, **Wiener**, en 1923 construit rigoureusement la fonction aléatoire du mouvement brownien et établit en particulier que **ses trajectoires sont continues**.

On voit donc que de nombreux mathématiciens ou physiciens comme ceux cités précédemment (on peut également citer **Kolmogorov**) ont étudié de près ce processus qui est en résumé, **le premier cas où le calcul des probabilités s'applique à la description physique indépendamment de tout jeu de hasard** (à savoir la description du mouvement d'une petite particule dans un liquide ou un gaz soumis à des chocs moléculaires dus à l'agitation thermique (notion déjà citée précédemment)).

2.2 Théorie

Nous allons avant de commencer réellement notre étude rappeler quelques théorèmes fondamentaux concernant le mouvement brownien qui pourront nous être utiles dans notre projet.

- **Définition du mouvement brownien :**

On appelle mouvement brownien un processus stochastique $(X_t)_{t\geq 0}$à variables aléatoires réelles qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues. Ce qui signifie que :

- continuité : P p.s la fonction $t \to X_t(w)$est une fonction continue.
- indépendance des accroissements : Si $s \leq t$, $X_t - X_s$est indépendant de la tribu $F_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.
- stationnarité des accroissements : si $s \leq t$,la loi de $X_t - X_s$est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

- **Théorème** : Un mouvement brownien est dit standard si

$$X_0 = 0 \quad P \quad p.s. \qquad E(X_t) = 0 \qquad E(X_t^2) = t$$

$$X_t\, suit\, une\, loi\, N(0,t)$$

Dans ce cas la loi de X prend la forme : $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$.

Proposition : Le mouvement Brownien est **continue en probabilité**.

Démonstration :

Pour commencer, on utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|B_{t_n} - B_{t_0}| > \varepsilon) \leq \frac{E(B_{t_n} - B_{t_0})^2}{\varepsilon^2} = \frac{(t_n - t_0)}{\varepsilon^2}$$

On a donc $P(|B_{t_n} - B_{t_0}| > \varepsilon) \to 0$ lorsque $t_n \to t_0$. Le mouvement brownien est donc continu en probabilité.

Chapitre 3

Construction du mouvement brownien

3.1 Théorie

En fait cette partie consiste à construire un mouvement brownien :
Soit $S^{(N)} = (S^{(N)}, t \geq 0)$le processus (i.e la famille de variables aléatoires) défini par :
- $S_0 = 0$
- Pour $n \geq 1$,

$$S_k = \sum_{1}^{k} Y_i \quad o\, les\, v.a\, Y_i\, sont\, i.i.d.\, de\, loi\, P(Y_i = -1) = P(Y_i = 1) = 1/2$$

- pour t=k/N, $S^{(N)}_{k/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k, k \in N$
- pour $\frac{k}{N} \leq t \leq \frac{(k+1)}{N}$, l'application $t \rightarrow S^{(N)}_t$est affine.

Proposition : La suite $S^{(N)}$converge en loi ($n \rightarrow \infty$) vers un processus aléatoire, noté $(B_t, t \geq 0)$. C'est le mouvement brownien.

Démonstration :
- Convergence en loi

Les variables aléatoires Y_i sont centrées et de variance 1. On peut donc appliqués le théorème central limite :

$$\frac{Y_1 + ... + Y_k}{\sqrt{k}} \hookrightarrow N(0,1)$$

On divise par $\sqrt{N}$ des deux côtés pour obtenir S_k.

$$\frac{Y_1 + ... + Y_k}{\sqrt{k}\sqrt{N}} \hookrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} N(0,1)$$

$$\frac{Y_1 + ... + Y_k}{\sqrt{N}} \hookrightarrow \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{N}} N(0,1)$$

Pour t=k/N, on obtient :

$$S_k \hookrightarrow N(0,t) = B_t$$

- La variable aléatoire $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$est indépendante des v.a $(B_{t_1} ... B_{t_{n-1}})$et a même loi que $B_{t_n - t_{n-1}}$.

En posant $t_n = n/N$ nous avons $S_n \hookrightarrow B_{t_n}$. Donc :

$$S_n - S_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}(Y_1 + ... + Y_n - (Y_1 + ... + Y_{n-1}))$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{Y_n}{\sqrt{N}}$$

Les $Y_i$sont indépendants . Par conséquent, $S_n - S_{n-1}$est indépendant des variables aléatoires $(S_1...S_{n-1})$.Donc on a bien la variable aléatoire $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ qui est indépendante des v.a $(B_{t_1}...B_{t_{n-1}})$.

On a $S_{n-(n-1)} \hookrightarrow B_{t_n - t_{n-1}}$, donc :

$$S_{n-(n-1)} = S_1 = \frac{Y_1}{\sqrt{N}}$$

Les Y_i ont même loi. Par conséquent, $S_n - S_{n-1}$a même loi que $S_{n-(n-1)}$. Donc on a bien la variable aléatoire $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$qui a même loi que $B_{t_n - t_{n-1}}$.

– $B_0 = 0$ p.s.

Il est évident que $S_0^{(N)} = 0$ puisque la somme est nulle

On a donc démontré que $\{S^{(N)}\}$converge en loi vers un mouvement brownien.

3.2 Simulation de $S_t^{(N)}$

3.2.1 Simulation de $S^{(50)}$

On a simulé $S^{(N)}$pour différentes valeurs de N :

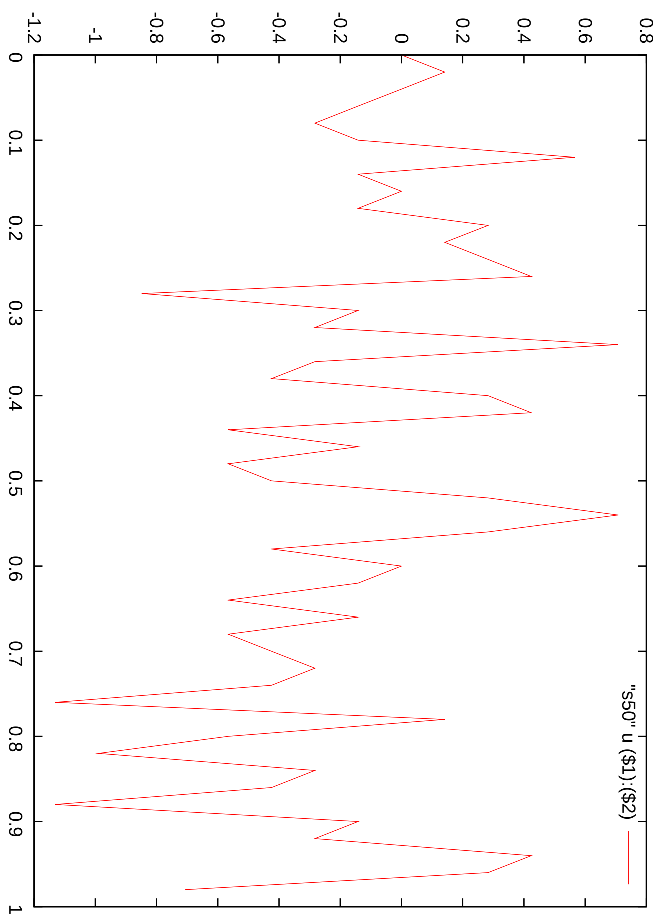

FIG. 3.1 – Simulation de $S^{(50)}$

3.2.2 Simulation de $S^{(200)}$

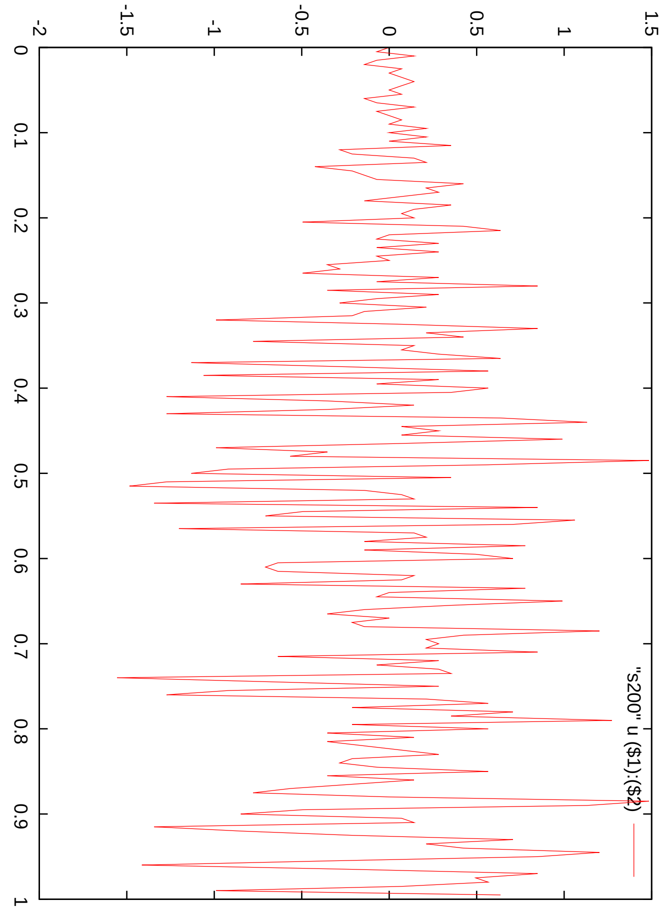

FIG. 3.2 – Simulation de $S^{(200)}$

En regardant l'allure de ces courbes, on peut remarquer que le mouvement brownien est continu. Ensuite, on voit qu'il présente des points de discontinuité (pics). Ceci n'étant qu'une approximation du mouvement brownien, on peut supposer qu'en prenant un N très grand, les pics seront beaucoup plus nombreux et donc que le mouvement brownien n'est dérivable en aucun point (presque sûrement).

Chapitre 4

Simulation du mouvement brownien réel.

4.1 Définition du mouvement brownien réel

Le mouvement brownien réel est comparable au processus de la partie précédente. On se contente de le prolonger sur tout $\mathbb{R}$. On considère deux processus indépendants B_t^1 et B_t^2 où t est positif. On pose alors $B_t = B_t^1$ si $t \geq 0$ et $B_t = B_{-t}^2$ si $t \leq 0$.

Pour simuler ce mouvement, nous allons utiliser les résultats précédents.

4.2 Simulation du mouvement brownien réel ($S^{(50)}$)

4.2.1 Mouvement brownien réel ($S^{(50)}$)

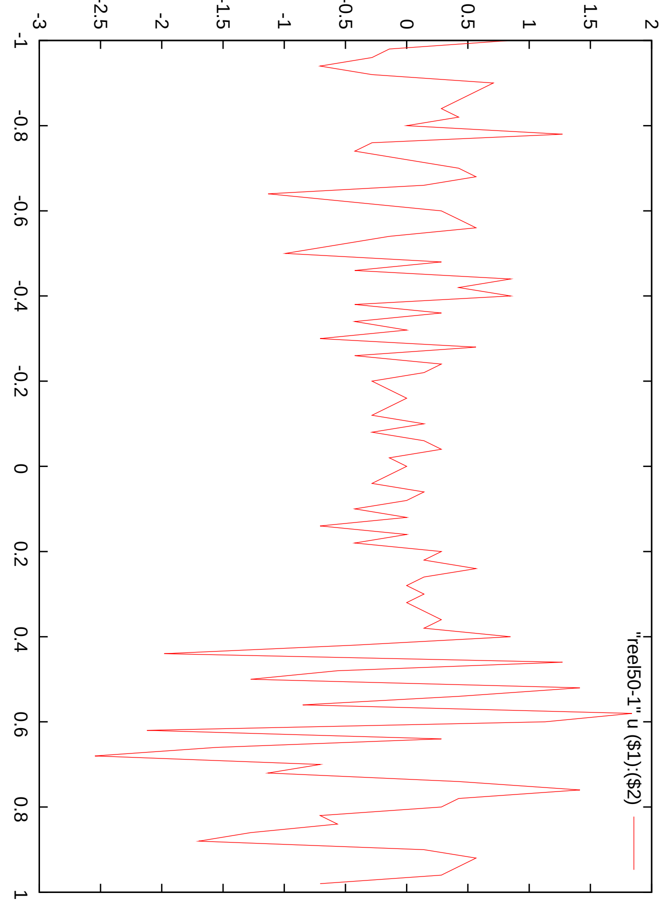

FIG. 4.1 – Mouvement brownien réel ($S^{(50)}$)

4.2.2 Mouvement brownien réel ($S^{(200)}$)

En relançant les calculs, on obtient le graphique suivant :

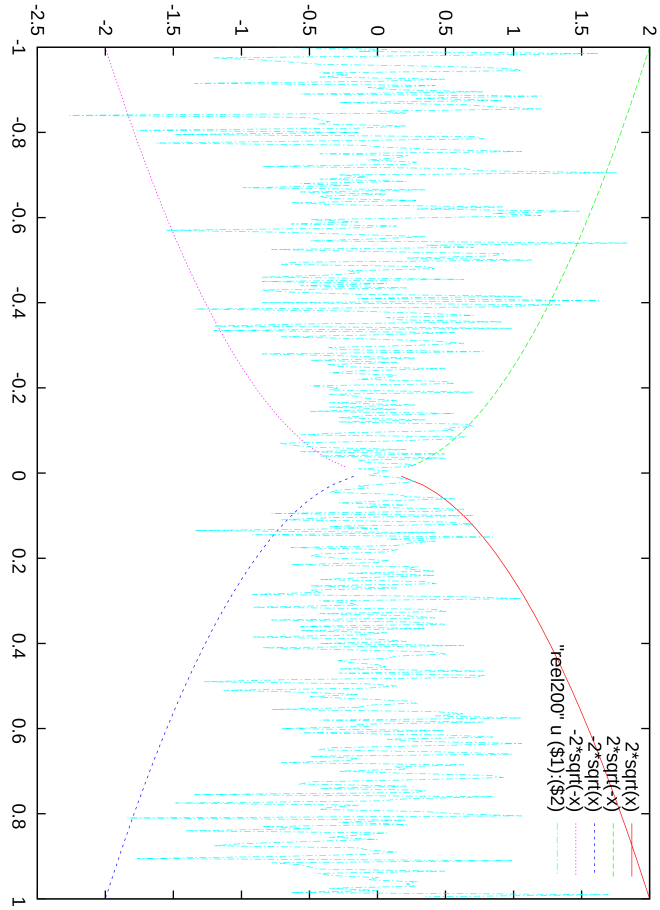

FIG. 4.2 – Mouvement brownien réel ($S^{(200)}$)

On peut remarquer une autre propriété du mouvement brownien. **Le mouvement brownien se situe avec une probabilité de 95% entre les courbes :**

$$f_1 = 2\sqrt{t} \; et \; f_2 = -2\sqrt{t}$$

Chapitre 5

Le Mouvement brownien Plan.

5.1 Définition du mouvement brownien plan.

Pour simuler un mouvement brownien plan, nous avons à nouveau programmé en java une petite application numérique.

On a $B_t = (B_t^1, B_t^2), t \in R$ où B_t^iet B_t^2 sont deux mouvements browniens réels indépendants.

5.2 Simulation du mouvement brownien plan.

Pour construire le mouvement brownien, plan nous avons utilisé le mouvement brownien réel de la partie précédentes. Cette fois-ci,nous avons simulé deux mouvement brownien réel indépendants.

5.2.1 Mouvement brownien plan (S^{50})

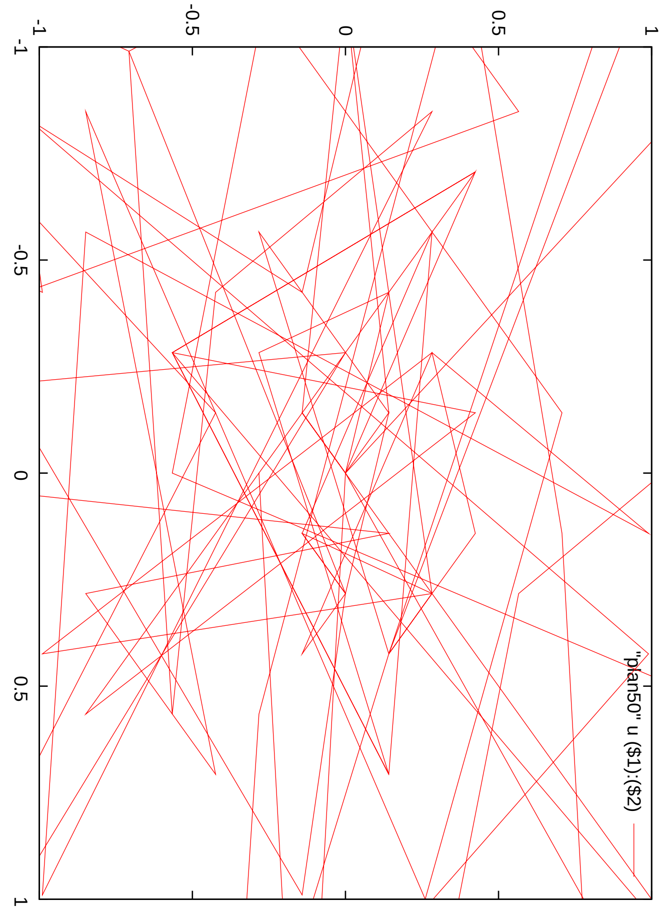

FIG. 5.1 – Mouvement brownien plan (S^{50})

5.2.2 Mouvement brownien plan (S^{200})

FIG. 5.2 – Mouvement brownien plan (S^{200})

On constate que le mouvement brownien est très chaotique.

Chapitre 6

Conclusion

Ce projet fût très intéressant à mener. En effet, il nous a permis d'avoir une première approche des processus stochastiques. Néanmoins ceux-ci nous demeure très mystérieux.

Ce projet nous a permis également de découvrir une application des probabilités. En effet, on a pu voir ici que les probabilités permettent de modéliser le déplacement très complexe d'une particule.

En ce qui concerne le mouvement brownien, il a été intéressant de montrer quelques unes des ses propriétés. Nous avions recherché et trouvé toutes les démonstrations dans des livres mais elles nous étaient hors de portée. Nous avons pensé qu'il serait plus intéressant de les démontrer avec nos moyens. Nous nous sommes donc abstenus de les insérer dans le rapport.

Le mouvement brownien semble être très complexe mais il serait très certainement intéressant d'approfondir cette étude.

Table des figures